Supersymétrie : Fondements mathématiques et Concepts élémentaires

Bertrand Jayles
Institut Pluridisciplinaire Hubert Curien
11/06/2013

Introduction : Symétries

- **Symétrie** : invariance d'un système par transformation
- Symétries d'**espace-temps** :

  Algèbre de Poincaré :

$$\begin{cases} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu} \\ & \quad + \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} \\ [J^{\mu\nu}, P^{\rho}] &= \eta^{\nu\rho} P^{\mu} - \eta^{\mu\rho} P^{\nu} \\ [P^{\mu}, P^{\nu}] &= 0 \end{cases}$$

  avec J : rotations et boosts,

  et P : translations

- Symétries **internes** :

  interactions fondamentales :

  $[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c$

  $\rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

Généralités

- **QFT** : particules, interactions $\sim$ champs
- Particules $\rightarrow$ **Représentations** des groupes de symétrie :

  $R_G(\theta) = e^{(i)\theta X} \;\rightarrow\; R_A(\theta) = 1 + (i)\theta X$

  avec θ : paramètres, et X : générateurs

- Lagrangiens invariants à une dérivée totale près.
- **Euler-Lagrange** : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\dagger)} \right) = 0$

Lagrangiens Fondamentaux

- **Klein-Gordon** : $\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$

  $\rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Psi = 0$

  $\Rightarrow$ décrit l'évolution des bosons **scalaires**, de spin 0

- **Dirac** : $\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_D (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi_D$

  $\rightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$

  $\Rightarrow$ décrit l'évolution des **fermions**, de spin $\frac{1}{2}$ uniquement

- **Maxwell** : $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\rho j_\rho$

$$\rightarrow \begin{cases} \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} &= 0 \\ \eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\rho} &= j_\rho \end{cases}$$

  $\Rightarrow$ décrit l'évolution des **photons**, bosons de spin 1

- **Yang-Mills** : $\mathcal{L}_E = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a - A_a^\rho j_\rho^a$

  $\Rightarrow$ généralisation du lagrangien de Maxwell

  $\Rightarrow$ décrit tous les autres bosons, dits **bosons de jauge**

Algèbre Supersymétrique

- **Supersymétrie** : symétrie entre bosons et fermions.
- **Superalgèbre de Lie** :
  - générateurs bosoniques : L, P

    $\oplus$ fermioniques : $Q, \bar{Q}$
  - anticommutateurs : $\{A, B\} = AB + BA$
- Algèbre de Poincaré
- $[L_{\mu\nu}, Q_\alpha] = \sigma_{\mu\nu\alpha}{}^\beta Q_\beta$

  $[L_{\mu\nu}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = \bar{\sigma}_{\mu\nu}{}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}$
- $[P_\mu, Q_\alpha] = 0\,, \quad [P_\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = 0$
- $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0\,, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0$

  $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu$

Objets de la Supersymétrie

- **Variables de Grassman** : θ^α et $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$
- **Superespace** : $(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$
- **Supercharges** :

$$\begin{cases} Q_\alpha &= -i(\partial_\alpha + i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu) \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= i(-\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu) \end{cases}$$

- **Dérivées covariantes** :

$$\begin{cases} D_\alpha &= \partial_\alpha - i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \end{cases}$$

- **Superchamp chiral** :

  $\Phi(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta \cdot \psi(y) - \theta \cdot \theta F(y)$

  $\rightarrow$ *particules de matière et boson de Higgs*

- **Superchamp vectoriel** :

  $V = \theta\sigma^\mu \bar{\theta} v_\mu + i\theta \cdot \theta\bar{\theta} \cdot \bar{\lambda} - i\bar{\theta} \cdot \bar{\theta}\theta \cdot \lambda + \frac{1}{2}\theta \cdot \theta\bar{\theta} \cdot \bar{\theta} D$

  $\rightarrow$ *interactions de jauge*

Lagrangiens invariants

- **Lagrangien libre de Wess-Zumino** :

$$\mathcal{L}_{WZ} = \Phi_a^\dagger \, \Phi^a \big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \frac{i}{2}(\psi\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - \partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\psi}) + F^\dagger F$$

- **Superpotentiel** : **termes d'interaction**

  $W(\Phi)\big|_{\theta^2} + W^*(\Phi^\dagger)\big|_{\bar{\theta}^2}$

- $W(\phi) = \frac{1}{6}\lambda\phi^3 + \frac{1}{2} m\phi^2$

$$\rightarrow \mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_M [i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\Psi_M - \frac{\lambda^2}{4} {\phi^\dagger}^2 \phi^2 - \frac{m\lambda}{2}[{\phi^\dagger}^2 \phi + \phi^\dagger \phi^2] - \frac{\lambda}{2}[\phi\psi \cdot \psi + \phi^\dagger \bar{\psi} \cdot \bar{\psi}]$$

Invariance de jauge abélienne

- **Transformation de jauge** :

  $e^{-2eV} \rightarrow e^{-2ie\Lambda^\dagger} e^{-2eV} e^{2ie\Lambda}$

  $\rightarrow \Phi^\dagger e^{-2eV} \Phi$ invariant de jauge

- **Dérivée covariante de jauge** :

  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$

$$\rightarrow \mathcal{L}_{WZ} = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi + \frac{i}{2}(\psi\sigma^\mu D_\mu \bar{\psi} - D_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\psi}) + F^\dagger F$$

- **Superchamp spinoriel** :

  $W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D} \cdot \bar{D} D_\alpha V$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E &= \frac{1}{4} W^\alpha W_\alpha \big|_{\theta^2} + \frac{1}{4} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \big|_{\bar{\theta}^2} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2 \end{aligned}$$

  $\rightarrow$ **photon** et **photino**

Invariance de jauge non-abélienne

- $v_\mu = v_\mu^a T_a$ et $V = V^a T_a$, $[T_a, T_b] \neq 0$
- $W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D} \cdot \bar{D} e^{2gV} D_\alpha e^{-2gV}$
- **Tenseur de courbure** :

  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu - ig[v_\mu, v_\nu]$

- **bosons de jauge** et **jauginos**

$$\mathcal{L} = \Phi^\dagger e^{-2gV} \Phi + W(\Phi) + W^*(\Phi^\dagger) + aTr(W^\alpha W_\alpha) + bTr(\bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}})$$

Lagrangien et Particules

- **Quarks** : ${Q^I}^\dagger e^{-2g_3V_3 - 2g_2V_2 - \frac{1}{3}g_1V_1} Q^I$
- **Anti-Q** : ${U^I}^\dagger e^{-2g_3V_3 - 2g_2V_2 + \frac{4}{3}g_1V_1} U^I + {D^I}^\dagger e^{-2g_3V_3 - 2g_2V_2 - \frac{2}{3}g_1V_1} D^I$
- **Leptons** : ${L^I}^\dagger e^{-2g_3V_3 - 2g_2V_2 + g_1V_1} L^I$
- **Anti-L** : ${E^I}^\dagger e^{-2g_3V_3 - 2g_2V_2 - 2g_1V_1} E^I + {N^I}^\dagger e^{-2g_3V_3 - 2g_2V_2} N^I$
- **Higgs** : $H_1^\dagger e^{-2g_3V_3 - 2g_2V_2 + g_1V_1} H_1 + H_2^\dagger e^{-2g_3V_3 - 2g_2V_2 - g_1V_1} H_2$
- **Trace** : $W_\alpha^1 W_1^\alpha + W_\alpha^2 W_2^\alpha + W_\alpha^3 W_3^\alpha + \bar{W}_1^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}}^1 + \bar{W}_2^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}}^2 + \bar{W}_3^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}}^3$
- **Superpotentiel** : $W = -y_{eIJ} L^I \cdot H_1 E^J - y_{dIJ} Q^I \cdot H_1 D^J + y_{uIJ} Q^I \cdot H_2 U^J + y_{nIJ} L^I \cdot H_2 N^J + \mu H_1 \cdot H_2 + m_{IJ} N^I N^J$

Conclusion : phénoménologie

- Pas de superpartenaire détecté à l'heure actuelle

  $\rightarrow$ *brisure de Supersymétrie*
- Recherche active au LHC jusqu'en 2014