Supersymétrie : Fondements mathématiques et Concepts élémentaires

Bertrand Jayles

Institut Pluridisciplinaire Hubert Curien

05/06/2013

Table des matières

1 Introduction : Une nouvelle symétrie

Les symétries occupent une place prépondérante en physique aujourd'hui, en particulier dans la description des interactions fondamentales. En effet, celles-ci reposent sur des groupes de symétrie particuliers, appelés groupes de jauge. Le terme de symétrie exprime une transformation qui, appliquée sur un système (équations fondamentales, lagrangiens ...), le laisse invariant. Ainsi des translations, rotations, ou encore des transformées de Lorentz.

La supersymétrie, théorie apparue dans les années 60, postule l'existence d'une symétrie nouvelle, impliquant les fermions - constituants de la matière - et les bosons - véhicules des interactions. L'objet de notre étude est de mettre en place le cadre mathématique dans lequel cette théorie peut se déployer, et de nous familiariser avec son formalisme, ainsi que les concepts majeurs sur lesquels elle s'appuie.

Ainsi, dans un premier temps, nous nous familiariserons avec les notions d'algèbre de Lie et de groupe, au travers de l'étude de ceux de Lorentz et Poincaré. Nous définirons également la notion de spineur, et en présenterons les principaux représentants.

Puis nous étudierons l'algèbre sous-tendant la supersymétrie, et nous familiariserons avec le formalisme des superchamps, particulièrement adapté à la manipulation des objets en supersymétrie. Nous verrons que cette algèbre est une extension des algèbres classiques, appelée superalgèbre de Lie, qui associe de façon profonde les bosons et les fermions.

Armés de ces notions nouvelles, nous tâcherons de construire des lagrangiens invariants, à partir desquels nous retrouverons toutes les équations fondamentales.

Enfin, nous introduirons les théories de jauge abélienne, sous-tendant l'électrodynamique quantique relativiste, puis non-abélienne, généralisant ces résultats, et ouvrant la voie à d'autres théories, telles que la chromodynamique quantique.

À l'issue de ce travail, nous serons en mesure de construire le lagrangien du modèle standard supersymétrique, modèle de base de cette théorie.

2 Algèbres fondamentales, Spineurs

Dans un premier temps, nous allons nous familiariser avec les notions fondamentales qui sous-tendent les modèles supersymétriques. Nous allons d'abord étudier les algèbres de Lorentz et Poincaré, qui définissent les symétries de l'espace-temps, puis nous présenterons les principales représentations spinorielles : celles de Dirac, Weyl et Majorana.

2.1 Groupe et algèbre de Lorentz

Remarque préliminaire : Nous utiliserons dans cette section uniquement des grandeurs spatio-temporelles. Ainsi, par convention (voir annexe A), nous n'utiliserons que des lettres du milieu de l'alphabet grec.

Soit Λ les matrices de Lorentz. La conservation du produit scalaire par changement de référentiel conduit à :

$$\eta = \Lambda^t \eta \Lambda \tag{1}$$

L'ensemble des matrices qui satisfont cette équation forme un groupe, que l'on appelle **groupe de Lorentz**.

Pour déterminer l'algèbre de ce groupe, considérons une transformation de Lorentz du premier ordre :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu$$

Comme on peut le voir dans l'annexe B.2, ε doit pouvoir se mettre sous la forme d'un produit de paramètres et de générateurs de l'algèbre.

Par application de l'équation (1) à notre transformation, nous arrivons immédiatement au résultat que ε est antisymétrique. Or on peut montrer que les tenseurs antisymétriques s'écrivent de manière générale sous la forme :

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \frac{\omega_{\rho\sigma}}{2}(J^{\rho\sigma})_{\mu\nu} = \frac{\omega_{\rho\sigma}}{2}(\delta^{\rho}{}_{\mu}\delta^{\sigma}{}_{\nu} - \delta^{\sigma}{}_{\mu}\delta^{\rho}{}_{\nu})$$

où les $J^{\rho\sigma}$ forment une base des matrices antisymétriques :

$$(J^{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\rho\mu}\delta^{\sigma}{}_{\nu} - \eta^{\sigma\mu}\delta^{\rho}{}_{\nu}$$

et les ω sont réels et également antisymétriques.

Par un calcul un peu long, mais relativement simple, nous montrons que les matrices J satisfont les relations de commutation :

$$\boxed{[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\sigma}J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu} + \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}}$$

Il s'agit de l'**algèbre de Lorentz**, dont les matrices J sont les générateurs, et ω les paramètres.

Remarque importante : Les transformations de Lorentz consistent en trois rotations spatiales $J^i = J^{jk}$ et trois *boosts* $K^i = J^{0i}$ selon les axes (Ox^i). Alors, si l'on introduit les générateurs :

$$N^i = \frac{1}{2}(J^i + iK^i) \qquad \text{et} \qquad \bar{N}^i = \frac{1}{2}(J^i - iK^i)$$

on obtient les relations de commutation suivantes :

$$[N^i, N^j] = N^k\,, \qquad [\bar{N}^i, \bar{N}^j] = \bar{N}^k\,, \qquad [N^i, \bar{N}^j] = 0$$

qui nous montrent que l'algèbre de Lorentz est équivalente à deux **algèbres de Lie**[1] *indépendantes*. On notera ses représentations par un couple (j_1, j_2), où $j_1, j_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Ainsi, la plus "petite" représentation non-triviale de l'algèbre de Lorentz est obtenue pour $(\underset{\sim}{\frac{1}{2}}, \underset{\sim}{0})$ et $(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{\frac{1}{2}})$. Les objets dans cette représentation sont par définition appelés **spineurs** (voir 2.3).

2.2 Algèbre de Poincaré

Soit l'intervalle spatio-temporel élémentaire : $ds^2 = dx^{\mu}dx^{\nu}\eta_{\mu\nu}$.
On montre aisément que la transformation la plus générale qui conserve ds^2 est :

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}$$

où a^{μ} est indépendant de x, et représente une translation de l'espace-temps.

Une telle transformation est appelée **transformation de Poincaré**. L'ensemble de ces transformations forme un groupe, appelé **groupe de Poincaré**, et noté $ISO(1,3)$.

Le groupe de Poincaré englobe celui de Lorentz, en lui ajoutant des translations. Ces degrés de liberté supplémentaires nécessitent des générateurs supplémentaires, que nous noterons P_{μ}

1. Pour la définition d'une algèbre de Lie, voir annexe B.2

(il y a une raison pour cette notation, comme nous le verrons ci-après). Comme précédemment, pour déterminer l'algèbre de Poincaré, nous partons d'une transformation infinitésimale :

$$(1+\omega,\varepsilon) = 1 + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \varepsilon_\mu P^\mu \tag{2}$$

puis, par compositions de transformations, nous arrivons aux relations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &=& \eta^{\nu\sigma}J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu} + \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} \\ [J^{\mu\nu}, P^\rho] &=& \eta^{\nu\rho}P^\mu - \eta^{\mu\rho}P^\nu \\ [P^\mu, P^\nu] &=& 0 \end{array}}$$

Ces trois relations constituent l'**algèbre de Poincaré**. On montre par un calcul direct que :

$$\begin{array}{lcl} J_{\mu\nu} & \to & L_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu \\ P_\mu & \to & -\partial_\mu \end{array}$$

où $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, engendrent une représentation de l'algèbre de Poincaré.

Remarques :

1. En mécanique quantique, l'opérateur impulsion $\vec{P}$ est donné par $-i\vec{\nabla}$, soit, suivant une composante x^μ : $-i\partial_\mu$. C'est pourquoi nous avons donné la lettre P aux générateurs de translation (voir nos conventions section A).
2. On reconnaîtra dans L_{ij} l'opérateur moment cinétique, à i près.

2.3 Spineurs

Les différentes grandeurs et notations que nous employons ici sont définies dans l'annexe C.2.

Considérons les matrices : $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.On montre qu'elles satisfont l'algèbre de Lorentz :

$$\boxed{[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\sigma}\gamma^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma}\gamma^{\rho\nu} + \eta^{\nu\rho}\gamma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}}$$

Les matrices $\gamma^{\mu\nu}$ engendrent une représentation de l'algèbre de Lorentz, appelée *représentation spinorielle*. Par définition, un **spineur de Dirac** Ψ_D se transforme sous le groupe de Lorentz, à partir des matrices $\gamma^{\mu\nu}$.

Remarque importante : Pour ce genre de calcul, que nous rencontrerons encore, il faut faire attention à utiliser les notations adéquates. Seul l'*anticommutateur* de deux fermions a un sens, tandis que seul le *commutateur* de deux bosons, ou d'un boson et d'un fermion, a un sens. Comme on l'a vu, γ^μ est un fermion, mais $\gamma^{\mu\nu}$, en tant que produit de deux fermions, est un boson.

Cependant, on peut montrer que cette représentation n'est pas irréductible. On définit les projections d'un spineur de Dirac selon sa chiralité gauche ou droite par :

$$\begin{pmatrix}\lambda_L \\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\Psi_D \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix}0 \\ \bar{\chi}_R\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\Psi_D$$

avec $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

λ_L est appelé **spineur gaucher** et $\bar{\chi}_R$ **spineur droitier**. De tels spineurs sont dits **spineurs de Weyl**. Un spineur de Dirac est donc la réunion de deux spineurs de Weyl.

Par un petit calcul, on montre alors que :

$$\gamma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

et il vient qu'un spineur gaucher se transforme dans une transformation de Lorentz à partir des matrices $\sigma^{\mu\nu}$ et un spineur droitier à partir de $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$. Ces deux types de matrices engendrent deux représentations spinorielles distinctes et irréductibles de l'algèbre de Lorentz, notées respectivement $(\underset{\sim}{\tfrac{1}{2}}, \underset{\sim}{0})$ et $(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{\tfrac{1}{2}})$.

Remarque : on peut montrer que ces deux représentations sont complexes conjuguées l'une de l'autre. On passe de l'une à l'autre par application de l'opérateur †.

Si nous définissons un spineur à quatre composantes à partir de deux spineurs de Weyl, *dans des représentations conjuguées l'un de l'autre*, nous obtenons un **spineur de Majorana**. Ce sont ceux que nous emploierons le plus.

Maintenant que nous connaissons les différents types de spineurs que nous allons utiliser dans la suite de notre étude, il nous faut définir une notation indicielle, afin de pouvoir manipuler ces grandeurs avec la même aisance que les grandeurs spatiotemporelles.

Nous utiliserons une notation particulièrement pratique, qui simplifie grandement les calculs : il s'agit de la **notation de Van der Waerden**. Elle revient à affecter aux spineurs gauchers des indices non-pointés, et aux spineurs droitiers des indices pointés (voir annexe A). Pour être cohérents avec les notations que nous avons choisies, les indices ne peuvent être placés n'importe comment. En particulier, pour satisfaire la convention (7), les matrices σ^μ et $\bar{\sigma}^\mu$ doivent respectivement posséder la structure indicielle suivante :

$$\sigma^\mu \to \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} \qquad \bar{\sigma}^\mu \to \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}$$

3 Supersymétrie : Algèbre et objets fondamentaux

Nous allons ici définir la supersymétrie, les concepts et les grandeurs fondamentaux qui lui sont rattachés.

3.1 Superalgèbre de Poincaré

La supersymétrie est basée sur la notion de **superalgèbre de Lie** (cf B.2), à partir de laquelle nous allons construire la **superalgèbre de Poincaré**. Il s'agit d'une extension de l'algèbre de Poincaré, dans laquelle :

- $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Poincaré, dont les générateurs sont $L_{\mu\nu}$ et P_μ :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{iso}(1,3) = \{L_{\mu\nu}, P_\mu, \mu, \nu = 0,1,2,3\}$$

- $\mathfrak{g}_1$ est une représentation spinorielle de $\mathfrak{g}_0$, de générateur un spineur de Majorana $\begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$:

$$\mathfrak{g}_1 = \{Q_\alpha, \alpha = 1,2\} \oplus \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \dot{\alpha} = 1,2\}$$

Nous connaissons déjà l'algèbre de Poincaré (cf 2.2), il nous reste à déterminer toutes les relations de commutation et d'anticommutation possibles entre tous ces générateurs. Comme nous ne connaissons pas encore les expressions de Q_α et $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, nous allons déterminer ces relations par d'autres méthodes.
Tout d'abord, d'après l'équation (5) (cf annexes), nous avons immédiatement :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} [L_{\mu\nu}, Q_\alpha] & = & \sigma_{\mu\nu\alpha}{}^\beta Q_\beta \\ [L_{\mu\nu}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] & = & \bar{\sigma}_{\mu\nu}{}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \end{array}}$$

En effet, nous avons vu que $\sigma_{\mu\nu}$ et $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ sont les générateurs de l'algèbre de Lorentz dans la représentation des spineurs de Weyl.

D'autre part, on peut trouver dans la littérature que les générateurs P^{μ}, Q_{α} et $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ sont respectivement dans les représentations $(\underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{2})$, $(\underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{1})$, et $(\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{2})$ du groupe de Lorentz. Issues du calcul tensoriel, nous trouvons aussi les relations :

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{2}) \otimes (\underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{1}) = (\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{2}) \oplus (\underset{\sim}{3}, \underset{\sim}{2}) \\ (\underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{2}) \otimes (\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{2}) = (\underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{1}) \oplus (\underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{3})\end{aligned}$$

Remarque : Nous avions dit en 2.3 que les représentations spinorielles de l'algèbre de Lorentz étaient $(\underset{\sim}{\frac{1}{2}}, \underset{\sim}{0})$ et $(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{\frac{1}{2}})$. En fait, ces représentations appartiennent à $\mathfrak{so}(1,3)$, et elles sont isomorphes respectivement aux représentations $(\underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{1})$ et $(\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{2})$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Comme, parmi les générateurs à notre disposition, aucun n'appartient à $(\underset{\sim}{3}, \underset{\sim}{2})$ ni $(\underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{3})$, on peut a priori écrire :

$$[P_{\mu}, Q_{\alpha}] = a\sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$$

où nous avons déduit logiquement, par simple analyse des indices, que σ_{μ} devait apparaître (et que c'est d'ailleurs la seule possibilité). De même, nous avons :

$$[P_{\mu}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = b\bar{\sigma}_{\mu}{}^{\dot{\alpha}\alpha}Q_{\alpha}$$

Pour déterminer les coefficients a et b, nous utilisons les super-identités de Jacobi, et on montre rapidement que l'on a $a = b = 0$. Ainsi, nous avons déterminé deux relations de commutation supplémentaires :

$$\boxed{\begin{array}{rcl}[P_{\mu}, Q_{\alpha}] & = & 0 \\ \left[P_{\mu}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] & = & 0\end{array}}$$

Pour les trois dernières relations, nous procédons précisément de la même manière, et nous obtenons :

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} & = & 0 \\ \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} & = & 0 \\ \{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} & = & -2i\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}P_{\mu}\end{array}}$$

où le coefficient $2i$ est choisi conventionnellement[2].

Nous avons ainsi totalement spécifié la superalgèbre de Poincaré, qui n'est autre que l'algèbre supersymétrique. Plus précisément, ces relations constituent la superalgèbre de Poincaré $N = 1$, c'est-à-dire celle pour laquelle il n'y a qu'un seul générateur spinoriel Q.

3.2 Les objets de la supersymétrie

Pour décrire des transformations supersymétriques, il nous faut considérer tout à la fois des variables bosoniques et fermioniques. Nous allons donc travailler dans un espace particulier, qui tient compte de tous ces degrés de liberté : c'est ce que l'on appellera un **superespace**.

Les variables de l'espace-temps classique seront notées x^{μ}, et les variables fermioniques θ^{α} et $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. Ces dernières sont appelées *variables de Grassman*, et constituent à elles deux un spineur de Majorana ($(\theta^{\alpha})^{\dagger} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$), partenaire supersymétrique des variables d'espace-temps.
Nous retiendrons les résultats fondamentaux suivants pour la suite de notre étude :

2. Cette convention implique que Q doit être hermitique.

- Alors que les variables d'espace-temps *commutent*, on prendra garde dans nos calculs que les variables de Grassman *anticommutent*.
- Les champs bosoniques et fermioniques *doivent toujours avoir le même nombre de degrés de libertés*. Ce résultat s'avèrera important un peu plus loin, dans la construction de lagrangiens invariants.

Nous appellerons *transformations supersymétriques* les transformations qui impliquent les générateurs fermioniques Q et $\bar{Q}$. Ces générateurs sont appelés **supercharges**, et sont définis par :

$$Q_\alpha = -i(\partial_\alpha + i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu)\,, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = i(-\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu)$$

où ∂_α et $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$ sont tels que :

$$\{\partial_\alpha, \theta^\beta\} = \delta_\alpha{}^\beta, \quad \{\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$$

Remarque : Ces supercharges sont fermioniques. *Leur action sur un boson produira un fermion, et inversement*.

De telles transformations impliquent une extension de l'espace habituel. D'après l'équation (9) de l'annexe, si l'on note ε et $\bar{\varepsilon}$ les paramètres de ces transformations, on les écrira de manière générale sous la forme [3] :

$$\delta_\varepsilon = i(\varepsilon \cdot Q + \bar{Q} \cdot \bar{\varepsilon})$$

En théorie quantique des champs, les particules et les interactions peuvent être décrites en termes de champs. On appelle **supermultiplet** un objet constitué d'un certain nombre de ces champs, représentatifs du système que l'on étudie. À partir de ces supermultiplets, on construit des **superchamps**, objets sur lesquels on travaille dans le superespace. Le langage des superchamps est particulièrement adapté pour construire des lagrangiens invariants, comme nous allons le voir.

Les opérations de dérivation sur ces objets se feront à partir d'un équivalent de la dérivée classique d'espace-temps ∂_μ, dans le superespace : la **dérivée covariante** et son conjugué, définis comme suit :

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\,, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu$$

4 Construction de Lagrangiens invariants

4.1 Lois de transformation

Considérons tout d'abord un superchamp scalaire complexe $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$. Trouver la loi de transformation qui le gouverne revient à trouver les lois de transformation de ses différentes composantes.

Signalons tout d'abord un résultat d'une grande utilité, en ce qu'il simplifie considérablement les calculs, qui découle de la définition même des variables de Grassman :

$$(\theta^1)^2 = (\theta^2)^2 = 0 \tag{3}$$

En effet, deux variables de Grassman anticommutent, donc : $\theta^\alpha\theta^\alpha = -\theta^\alpha\theta^\alpha = 0$. Il en va bien sûr de même pour $\bar{\theta}$.

Ce résultat est d'une importance remarquable, car il va nous permettre de développer Φ en puissances de θ et $\bar{\theta}$, et ce développement sera *fini* : tout terme faisant apparaître des produits de plus de deux θ ou $\bar{\theta}$ sera automatiquement nul, car il n'y a que deux indices spinoriels possibles.

3. Q étant hermitique, il nous faut rajouter un i dans la représentation de la transformation supersymétrique.

Ainsi donc on montre, au bout de quelques lignes de calcul, que le superchamp Φ se décompose de la façon suivante :

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = z(x) \ + \ \theta\cdot\xi(x) \ + \ \bar{\theta}\cdot\bar{\zeta}(x) \ + \ \theta\cdot\theta f(x) \ + \ \bar{\theta}\cdot\bar{\theta}g(x) \ + \\ \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) \ + \ \bar{\theta}\cdot\bar{\theta}\theta\cdot\omega(x) \ + \ \theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\rho}(x) \ + \ \theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}d(x) \quad (4)$$

Cette décomposition nous permet d'identifier les différentes composantes de Φ : z, f, g, et d sont des champs scalaires complexes, A^μ un champ vectoriel complexe, ξ et ω des spineurs gauchers et ζ et ρ des spineurs droitiers. Il n'y a pas d'autre possibilité, car le superchamp étant scalaire, toutes les quantités doivent être non-indicées.

On remarquera au passage qu'il y a le même nombre de degrés de liberté bosoniques et fermioniques (un champ scalaire complexe en possède 2), qui est ici de 16.

Nous pouvons maintenant déterminer les lois de transformation de ces différentes composantes, par application directe de l'opérateur :

$$i(\varepsilon\cdot Q + \bar{Q}\cdot\bar{\varepsilon}) = \varepsilon\cdot\partial - \bar{\partial}\cdot\bar{\varepsilon} + i(\varepsilon\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\varepsilon})\partial_\mu$$

Après des calculs un peu longs mais sans difficulté, on trouve les lois de transformation supersymétriques des différents champs :

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\delta z & = & \varepsilon\cdot\xi + \bar{\varepsilon}\cdot\bar{\zeta} \\
\delta\xi & = & 2f\varepsilon + \sigma^\mu\bar{\varepsilon}(A_\mu - i\partial_\mu z) \\
\delta\bar{\zeta} & = & 2g\bar{\varepsilon} - \bar{\sigma}^\mu\varepsilon(A_\mu + i\partial_\mu z) \\
\delta f & = & \frac{i}{2}\partial_\mu\xi\sigma^\mu\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}\cdot\bar{\rho} \\
\delta g & = & -\frac{i}{2}\varepsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta} + \varepsilon\cdot\omega \\
\delta A_\mu & = & -\frac{i}{2}\varepsilon\cdot\partial_\mu\xi - i\varepsilon\sigma_{\nu\mu}\partial^\nu\xi + \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\cdot\partial_\mu\bar{\zeta} - i\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}_{\nu\mu}\partial^\nu\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}\bar{\sigma}_\mu\omega - \bar{\rho}\bar{\sigma}_\mu\varepsilon \\
\delta\omega & = & -i\sigma^\mu\bar{\varepsilon}\partial_\mu g + \frac{i}{2}\varepsilon\partial\cdot A - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} + 2\varepsilon d \\
\delta\bar{\rho} & = & -i\bar{\sigma}^\mu\varepsilon\partial_\mu f - \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\partial\cdot A + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\varepsilon}F_{\mu\nu} + 2\bar{\varepsilon}d \\
\delta d & = & \partial_\mu(\frac{i}{2}\omega\sigma^\mu\bar{\varepsilon} - \frac{i}{2}\varepsilon\sigma^\mu\bar{\rho})
\end{array}}$$

où nous avons introduit $F_{\mu\nu}$, le **tenseur de Faraday** (voir annexe C.3).

Nous pouvons faire ici deux remarques fondamentales :

- Ces équations nous montrent le principe de base de la supersymétrie : *un boson se transforme en fermion, et inversement, par transformation supersymétrique*.
- le terme de plus haut degré, en $\theta^2\bar{\theta}^2$, se transforme comme une dérivée totale. d peut donc servir de base à la construction d'un lagrangien invariant (voir annexe C.4).

4.2 Lagrangien libre

Nous nous plaçons ici dans le modèle de Wess-Zumino. Dans ce modèle, nous considérons un supermultiplet élémentaire, constitué d'un boson et d'un fermion superpartenaires, ainsi que d'un champ auxiliaire. Comme nous allons le voir, les superchamps associés à de tels supermultiplets sont appelés **superchamps chiraux**, et *décrivent les champs de matière, ainsi que les bosons de Higgs*.

Un superchamp chiral satisfait par définition la contrainte :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = 0$$

Cette contrainte est *stable* par transformation supersymétrique, c'est-à-dire que l'on a également $\delta\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$.

Soit le changement de variable $y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$, alors on montre aisément que $\bar{D}_{\dot{\alpha}} y^\mu = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^\alpha = 0$. Comme :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial y^\mu}\bar{D}_{\dot{\alpha}} y^\mu + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta^\alpha}\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = 0$$

on déduit immédiatement que Φ ne dépend pas de $\bar{\theta}$. Ceci nous amène, d'après l'équation (4), à la forme simplifiée suivante pour un superchamp chiral :

$$\boxed{\Phi(y,\theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\cdot\psi(y) - \theta\cdot\theta F(y)} \tag{5}$$

où nous avons choisi conventionnellement les noms des fonctions et les valeurs des coefficients. Nous avons ici deux champs scalaires complexes, et un spineur gaucher. Par identification avec les lois générales, on détermine les lois de transformation des superchamps chiraux :

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \sqrt{2}\varepsilon\cdot\psi \\
\delta\psi &= -\sqrt{2}\varepsilon F - i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\varepsilon}\partial_\mu\phi \\
\delta F &= -i\sqrt{2}\partial_\mu\psi\sigma_\mu\phi = \partial_\mu(-i\sqrt{2}\psi\sigma^\mu\bar{\epsilon})
\end{aligned}$$

Remarquons que le terme en θ^2 se transforme comme une dérivée totale, et est donc adapté à la construction d'un lagrangien invariant.

Pour revenir à la variable x, il nous suffit de faire un développement de Taylor, ce qui nous donne, en utilisant le résultat (3) :

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = \phi(x) + \sqrt{2}\theta\cdot\psi(x) - \theta\cdot\theta F(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\cdot\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}\Box\phi(x)$$

On obtient $\Phi^\dagger$ par conjugaison hermitique. Le produit de deux superchamps étant à l'évidence un superchamp, il nous suffit de considérer le terme en $\theta^2\bar{\theta}^2$ de $\Phi\Phi^\dagger$ pour obtenir un lagrangien invariant par transformation supersymétrique, d'après la remarque que nous avons faite à la fin du paragraphe précédent. Nous obtenons ainsi le **lagrangien libre de Wess-Zumino** :

$$\boxed{\mathcal{L}_{WZ} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi \ + \ \frac{i}{2}(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi}) \ + \ F^\dagger F}$$

Ce lagrangien est extrêmement important. Il contient les lagrangiens de Klein-Gordon et Dirac, qui décrivent respectivement le comportement du boson scalaire ϕ et du fermion ψ, ainsi qu'un lagrangien auxiliaire.

La théorie quantique des champs prédit l'existence de processus physiques, impliquant des particules virtuelles, pour lesquelles le quadrimoment $P_\mu P^\mu$ peut prendre des valeurs quelconques, autres donc que la valeur $-m^2$ prévue par la relativité restreinte. De telles particules sont dites *hors couche de masse* ("offshell"), et violent les équations du mouvement. Hors de ces processus, les équations du mouvement doivent être prises en compte, et on dit que l'on travaille *sur couche de masse* ("onshell"). Le champ auxiliaire sert à maintenir l'égalité des degrés de liberté bosoniques et fermioniques :

	ϕ	ψ	F
offshell	2	4	2
onshell	2	2	0

4.3 Termes d'interaction

Nous nous sommes ensuite intéressé aux termes d'interaction. Pour cela, nous avons introduit une collection de superchamps chiraux $\Phi = \{\Phi^a, a = 1, ..., n\}$, et un **superpotentiel** $W(\Phi)$, fonction de superchamps chiraux uniquement. D'après l'expression (5), on peut faire un développement de $W(\Phi)$ en série de Taylor autour de ϕ, en tenant compte du résultat (3). On obtient alors :

$$W(\Phi) = W(\phi) + \sqrt{2}\theta \cdot \psi^a W_a - \theta \cdot \theta \left[F^a W_a + \frac{1}{2}\psi^a \cdot \psi^b W_{ab} \right]$$

où $W_a = \frac{\partial W}{\partial \phi^a}$ et $W_{ab} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b}$.

Par construction même, $W(\Phi)$ est aussi un superchamp chiral. D'après les équations de transformation, on sait que les termes de plus haut degré des superchamps chiraux, en θ^2, se transforment comme des dérivées totales, et forment donc des lagrangiens invariants.

De même, le terme $W^*(\Phi^\dagger)\big|_{\bar{\theta}^2}$ est aussi invariant par transformation supersymétrique. Ces deux termes constituent les **termes d'interaction** du lagrangien complet, donné par :

$$\boxed{\mathcal{L} = \Phi_a^\dagger \, \Phi^a|_{\theta^2\bar{\theta}^2} + W(\Phi)|_{\theta^2} + W^*(\Phi^\dagger)\Big|_{\bar{\theta}^2}}$$

Pour obtenir l'expression du lagrangien sur couche de masse, il faut déterminer les équations du mouvement de F et $F^\dagger$, puis les réinjecter dans l'expression du lagrangien. C'est ce qu'on appelle *éliminer les champs auxiliaires*.

Nous pouvons a priori donner n'importe quelle forme à $W(\phi)$, nous en retiendrons cependant deux, qui conduisent à des lagrangiens remarquables :

1. $$W(\phi) = \frac{1}{6}\lambda\phi^3 + \frac{1}{2}m\phi^2$$

   qui conduit aux termes cinétique et de masse :

   $$\mathcal{L}_{CM} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_M[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\Psi_M$$

   - où nous retrouvons le lagrangien de Klein-Gordon pour un boson de masse m, et le lagrangien de Dirac pour un fermion de Majorana de masse m - ainsi qu'aux termes d'interaction :

   $$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda^2}{4}{\phi^\dagger}^2\phi^2 - \frac{m\lambda}{2}[{\phi^\dagger}^2\phi + \phi^\dagger\phi^2] - \frac{\lambda}{2}[\phi\psi\cdot\psi + \phi^\dagger\bar{\psi}\cdot\bar{\psi}]$$

   qui contiennent deux termes scalaires et un terme d'interaction (dite *de Yukawa*) entre un boson et un fermion.

2. $$W(\phi_+, \phi_-) = m\phi_+\phi_-$$

   qui conduit aux termes cinétique et de masse (il y a ici deux champs auxiliaires F_+ et F_-) :

   $$\mathcal{L}_{CM} = \partial_\mu\phi_+^\dagger\partial^\mu\phi_+ + \partial_\mu\phi_-^\dagger\partial^\mu\phi_- - m^2[\phi_-^\dagger\phi_- + \phi_+^\dagger\phi_+] + \bar{\Psi}_D[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\Psi_D$$

	ϕ	ψ	F
offshell	4	8	4
onshell	4	4	0

   Ce lagrangien décrit deux bosons de masse m et un fermion de Dirac de masse m.

   Remarquons que dans les deux cas, **le boson et le fermion superpartenaires possèdent la même masse**.

5 Théories de jauge

5.1 Invariance de jauge abélienne

Nous allons dans un premier temps construire le lagrangien libre de l'électrodynamique quantique supersymétrique, dans le langage des superchamps. Il doit conserver son invariance de jauge (voir annexe C.5.1) sous $U(1)$, et nous allons le rendre également invariant par transformation supersymétrique.

5.1.1 Électrodynamique supersymétrique

Considérons un **superchamp réel** V, c'est-à-dire tel que : $V^\dagger = V$. En tenant compte de ce critère, et en utilisant la forme générale des superchamps (cf équation (4)), on peut écrire V de la façon suivante :

$$V(x,\theta,\bar{\theta}) = C(x)+i\theta\cdot\chi(x)-i\bar{\theta}\cdot\bar{\chi}(x)+\frac{i}{2}\theta\cdot\theta(M(x)+iN(x))-\frac{i}{2}\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}(M(x)-iN(x))+\theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x)$$
$$+ i\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot(\bar{\lambda}(x)-\frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)) - i\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}\theta\cdot(\lambda(x)-\frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)) + \frac{1}{2}\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}(D(x)-\frac{1}{2}\Box C(x))$$

où C, M, N et D sont des champs scalaires réels, v_μ un champ vectoriel réel, et $(\chi,\bar{\chi})^t, (\lambda,\bar{\lambda})^t$ des spineurs de Majorana. Considérons la **transformation de jauge** :

$$V \to V' = V + \Phi + \Phi^\dagger$$

où Φ est un superchamp chiral, $\Phi^\dagger$ son conjugué. Comme $(\Phi+\Phi^\dagger)^\dagger = \Phi + \Phi^\dagger$, V' est aussi un superchamp réel.

Il vient immédiatement que dans cette transformation :

$$\begin{array}{lcl}
C & \to & C+\phi+\phi^\dagger \\
\chi & \to & \chi - i\sqrt{2}\psi \\
M-iN & \to & M+iN+2iF \\
v_\mu & \to & v_\mu - i\partial_\mu(\phi-\phi^\dagger) \\
\lambda & \to & \lambda \\
D & \to & D
\end{array}$$

On remarque tout d'abord que λ et D sont des invariants de jauge. De ces expressions, nous voyons que nous pouvons nous placer dans une jauge particulière, appelée **jauge de Wess-Zumino**, pour laquelle $C = -(\phi+\phi^\dagger), \chi = i\sqrt{2}\psi$ et $M+iN = -2iF$. Dans une telle jauge, le superchamp s'écrit :

$$\boxed{V_{WZ} = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu + i\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}\theta\cdot\lambda + \frac{1}{2}\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}D}$$

Un tel superchamp, construit à partir du supermultiplet $(v_\mu,\lambda,\bar{\lambda},D)$, est dit **vectoriel**, et *décrit les interactions de jauge*. Avec le supermultiplet chiral, ce sont les deux types de multiplets apparaissant en supersymétrie. Par identification avec les équations de transformation générales, on a :

$$\begin{aligned}
\delta v_\mu &= i(\varepsilon\sigma_\mu\bar{\lambda} - \lambda\sigma_\mu\bar{\varepsilon}) \\
\delta\lambda &= \sigma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} + i\varepsilon D \\
\delta D &= \partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\varepsilon} + \varepsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}
\end{aligned}$$

Nous voulons construire un lagrangien invariant à la fois *par transformation supersymétrique* et *de jauge*. Nous avons déjà vu que pour satisfaire la première condition, il nous suffit de construire un superchamp chiral, et de prendre ses termes en θ^2.

Considérons le **superchamp spinoriel** $W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\cdot\bar{D}D_\alpha V$. Par application de la dérivée covariante, et de la transformation de jauge vue précédemment, on montre facilement que W_α est chiral et invariant de jauge. Par un calcul direct, assez long et délicat, on montre que :

$$W^\alpha = -i\lambda^\alpha + [\frac{i}{2}(\theta\sigma^\rho\bar{\sigma}^\sigma)^\alpha F_{\rho\sigma} + \theta^\alpha D] + \theta\cdot\theta(\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu)^\alpha$$

On voit alors tout de suite, d'après le résultat (3), que le produit $W^\alpha W_\alpha$ est un superchamp chiral. De même, $\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}$ est anti-chiral, et on peut donc obtenir un lagrangien, *invariant par transformation supersymétrique*, à partir du terme : $\frac{1}{4}\,W^\alpha W_\alpha|_{\theta^2} + \frac{1}{4}\,\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\big|_{\bar{\theta}^2}$. Après calcul, on obtient le lagrangien libre de l'**électrodynamique supersymétrique** :

$$\boxed{\mathcal{L}_E = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + \frac{1}{2}D^2}$$

Conclusions :

- Puisque $\delta(AB) = A\delta(B) + \delta(A)B$, si A et B sont invariants de jauge, alors AB l'est aussi. Donc, par construction même, $\mathcal{L}_E$ est *invariant de jauge*.
- On retrouve le **lagrangien électrodynamique classique** $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (dans le vide, cf annexe C.3), qui décrit l'évolution du photon.
- Deux autres termes apparaissent. Le premier décrit le superpartenaire du photon : le **photino**, tandis que le second est un champ auxiliaire.

5.1.2 Lagrangien libre de Wess-Zumino

Nous voulons maintenant rendre le lagrangien libre de Wess-Zumino, déterminé précédemment, invariant de jauge. Considérons un superchamp chiral Φ, se transformant sous $U(1)$ en $e^{2ei\Lambda}\Phi$. Le terme $\Phi\Phi^\dagger$ n'est plus invariant de jauge, mais conduit à un terme du type $e^{i(\Lambda-\Lambda^\dagger)}$. Il faut alors trouver un moyen de compenser ces termes.

Si l'on remarque que la transformation de jauge précédente s'écrit à un niveau fini :

$$e^{-2eV} \to e^{-2ie\Lambda^\dagger}e^{-2eV}e^{2ie\Lambda}$$

où $\Lambda = i\Phi$ est un superchamp chiral, alors il est facile de montrer que le terme $\Phi^\dagger e^{-2eV}\Phi$ est invariant sous cette jauge. De plus, dans la jauge de Wess-Zumino, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} V_{WZ}^2 & = & \frac{1}{2}\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}v^\mu v_\mu \\ V_{WZ}^3 & = & 0 \end{array}\right.$$

On peut donc faire un développement limité de e^{-2eV}, et on voit tout de suite que $\Phi^\dagger e^{-2eV}\Phi$ est un superchamp. Il suffit donc de calculer son terme en $\theta^2\bar{\theta}^2$ pour obtenir un lagrangien invariant de jauge, et par transformation supersymétrique.

Comme il s'agit d'une invariance de jauge, on doit retrouver la dérivée covariante de jauge (voir annexe C.5.1), et l'on obtient, après mise en forme, le lagrangien de Wess-Zumino, rendu invariant de jauge :

$$\mathcal{L}_{WZ} = D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi \;+\; \frac{i}{2}(\psi\sigma^\mu D_\mu\bar{\psi} - D_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi}) \;+\; F^\dagger F$$

Apparaissent également des termes d'interaction entre bosons et fermions, ainsi qu'un terme auxiliaire :

$$\mathcal{L}_{int} = -eD\phi^\dagger\phi + i\sqrt{2}e\phi\bar{\lambda}\cdot\bar{\psi} - i\sqrt{2}e\phi\lambda\cdot\psi$$

Conclusion : la somme de $\mathcal{L}_E$ et $\mathcal{L}_{WZ}$ constitue le lagrangien supersymétrique de l'électrodynamique quantique relativiste. Ce lagrangien décrit l'interaction entre électrons (ψ) et positrons ($\bar{\psi}$) par échange de photons.

5.2 Invariance de jauge non-abélienne

Considérons maintenant une algèbre de Lie non-abélienne (voir annexe C.5.2) de générateurs T_a. Soient $V = V^aT_a$ un superchamp réel et $\Lambda = \Lambda^aT_a$ un superchamp chiral. On s'intéresse à la même transformation de jauge que précédemment :

$$e^{-2eV} \to e^{-2ie\Lambda^\dagger}e^{-2eV}e^{2ie\Lambda}$$

où g est la constante de couplage.

Dans cette théorie de jauge non-abélienne, W_α et $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ *ne sont plus invariants de jauge*. Il s'agit alors de construire de nouveaux superchamps spinoriels, de forme équivalente à celle de la section précédente, mais munis d'une dérivée covariante de jauge. Nous pouvons vérifier que si nous définissons ces superchamps de la façon suivante :

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\cdot\bar{D}e^{2gV}D_\alpha e^{-2gV}\,, \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}D\cdot De^{-2gV}\bar{D}_{\dot{\alpha}}e^{2gV}$$

leurs carrés $W^\alpha W_\alpha$ et $\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}$ *sont invariants de jauge*. Nous pouvons ensuite calculer ces superchamps et, moyennant l'introduction de la quantité $F_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu - ig[v_\mu, v_\nu]$ [4], on retrouve leur forme vue précédemment :

$$W_\alpha = -2g\left(-i\lambda_\alpha + \left[-\frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)_\alpha F_{\mu\nu} + \theta_\alpha D\right] - \theta\cdot\theta(\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda})_\alpha\right)$$

Rappelons que dans notre jauge non-abélienne : $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T_a$, $\lambda = \lambda^aT_a$, etc, où les T_a sont des matrices dans la représentation considérée. Pour obtenir un lagrangien scalaire, nous devrons donc nous intéresser à la trace de tels objets, définie par :

$$Tr(T_aT_b) = \tau_R\delta_{ab}$$

où τ_R est une constante dépendant de la représentation choisie.

Nous connaissons maintenant les substitutions que nous devons faire pour obtenir des quantités invariantes sous une transformation de jauge non-abélienne. Nous pouvons donc définir un superpotentiel W invariant de jauge (à ne pas confondre avec le superchamp spinoriel W^α !) et construire le lagrangien suivant, invariant à la fois de jauge et par transformation supersymétrique :

$$\mathcal{L} = \Phi^\dagger e^{-2gV}\Phi\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} + \frac{1}{16g^2\tau_R}\,Tr(W^\alpha W_\alpha)|_{\theta^2} + \frac{1}{16g^2\tau_R}\,Tr(\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}})\big|_{\theta^2} + W(\Phi)|_{\theta^2} + W^*(\Phi^\dagger)\Big|_{\bar{\theta}^2} \quad (6)$$

Si l'on applique les équations du mouvement pour supprimer les champs auxiliaires, on trouve :

$$F^i = \frac{\partial\bar{W}}{\partial\phi^\dagger}\,, \qquad D^a = -g\phi^\dagger T^a\phi\,, \quad \text{et donc}$$

4. $F^a_{\mu\nu}$ est appelé **tenseur de courbure**, et décrit la dynamique du champ de jauge v^a_μ.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \frac{i}{2}(\lambda^a\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda}_a - D_\mu\lambda^a\sigma^\mu\bar{\lambda}_a) + D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi - \frac{i}{2}(D_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\psi - \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi) + i\sqrt{2}g\bar{\lambda}\cdot\bar{\psi}T_a\phi$$
$$- i\sqrt{2}g\phi^\dagger T_a\psi\cdot\lambda^a - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial\phi^i\partial\phi^j}\psi^i\cdot\psi^j - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W^*(\phi^\dagger)}{\partial\phi_i^\dagger\partial\phi_j^\dagger}\bar{\psi}_i\cdot\bar{\psi}_j - V(\phi,\phi^\dagger)$$

où $V(\phi,\phi^\dagger) = F_i^\dagger F^i + \frac{1}{2}D^a D_a$ est le potentiel scalaire.
Les différents termes du lagrangiens décrivent, de gauche à droite :
- des bosons vectoriels v_μ^a, appelés **bosons de jauge**.
- leurs partenaires supersymétriques, des fermions de Majorana $(\lambda^a, \bar{\lambda}^a)^t$: ce sont les **jauginos**.
- un boson scalaire, et son partenaire supersymétrique, qui est un fermion de Weyl.
- des termes d'interaction, dont le potentiel scalaire explicité ci-dessus.

6 Conclusion : Lagrangien et Physique des Particules

En guise de conclusion, nous ferons le lien entre la supersymétrie et la physique des particules, en construisant le lagrangien général décrivant les particules du modèle standard. Nous avons vu en annexe que le groupe de jauge du modèle standard est :

$$G = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

On associe à chacun de ces facteurs un superchamp vectoriel, décrivant l'interaction correspondante :

$$\begin{aligned} SU(3)_c &\to V_3 = (\underset{\sim}{8}, \underset{\sim}{1}, 0) \\ SU(2)_L &\to V_2 = (\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{3}, 0) \\ U(1)_Y &\to V_1 = (\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{1}, 0) \end{aligned}$$

où nous avons donné entre parenthèses, les représentations des superchamps, selon les groupes de jauge $SU(3)$ et $SU(2)$, ainsi que leur hypercharge, respectivement (voir annexe B.2.2).

Les particules de matière et les bosons de Higgs, nous l'avons vu, sont décrites par des superchamps chiraux : le modèle standard *n'admet pas* de supermultiplet antichiral. Nous appellerons donc gauchers les supermultiplets du modèle standard [5] :

- les **quarks gauchers** : $Q^I = (\underset{\sim}{3}, \underset{\sim}{2}, \frac{1}{6})$
- les **antiquarks gauchers** : $U^I = (\underset{\sim}{\bar{3}}, \underset{\sim}{1}, -\frac{2}{3})$, $D^I = (\underset{\sim}{\bar{3}}, \underset{\sim}{1}, \frac{1}{3})$
- les **leptons gauchers** : $L^I = (\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{2}, -\frac{1}{2})$
- les **antileptons gauchers** : $E^I = (\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{1}, 1)$, $N^I = (\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{1}, 0)$
- les **bosons de Higgs** : $H_1 = (\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{2}, -\frac{1}{2})$, $H_2 = (\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{2}, \frac{1}{2})$

où $I = \{1,2,3\}$ est un indice de *saveur*, tenant compte des trois familles de quarks et leptons.

Pour construire les différents termes du lagrangien, partons de l'équation (6). Signalons toutefois que cette équation correspond à un superchamp d'hypercharge égale à 1. Dans le cas général, nous devons considérer la forme $\Phi^\dagger e^{-2gqV}\Phi$, où q est l'hypercharge du superchamp correspondant. Les termes cinétiques sont :

5. Notons cependant qu'il est possible de construire un supermultiplet chiral à partir d'une antiparticule droitière, en utilisant son **conjugué de charge**.

1. Quarks : ${Q^I}^\dagger e^{-2g_3V_3-2g_2V_2-\frac{1}{3}g_1V_1}Q^I$
2. Anti-quarks : ${U^I}^\dagger e^{-2g_3V_3-2g_2V_2+\frac{4}{3}g_1V_1}U^I + {D^I}^\dagger e^{-2g_3V_3-2g_2V_2-\frac{2}{3}g_1V_1}D^I$
3. Leptons : ${L^I}^\dagger e^{-2g_3V_3-2g_2V_2+g_1V_1}L^I$
4. Anti-leptons : ${E^I}^\dagger e^{-2g_3V_3-2g_2V_2-2g_1V_1}E^I + {N^I}^\dagger e^{-2g_3V_3-2g_2V_2}N^I$
5. Bosons de Higgs : $H_1^\dagger e^{-2g_3V_3-2g_2V_2+g_1V_1}H_1 + H_2^\dagger e^{-2g_3V_3-2g_2V_2-g_1V_1}H_2$
6. Termes de trace : $W_\alpha^1 W_1^\alpha + W_\alpha^2 W_2^\alpha + W_\alpha^3 W_3^\alpha + \bar{W}_1^{\dot\alpha}\bar{W}_{\dot\alpha}^1 + \bar{W}_2^{\dot\alpha}\bar{W}_{\dot\alpha}^2 + \bar{W}_3^{\dot\alpha}\bar{W}_{\dot\alpha}^3$

Pour obtenir le terme d'interaction, on construit le superpotentiel à partir de tous les couplages possibles. Pour les déterminer, utilisons des considérations sur les groupes :

- $SU(2)$ et $SU(3)$ conservent le produit hermitien.
- $\underset{\sim}{2}$ et $\underset{\sim}{\bar{2}}$ sont isomorphes.
- $\underset{\sim}{1}$ est une représentation scalaire, donc invariante par $SU(2)$ et $SU(3)$.
- D'après ces résultats, $\underset{\sim}{2} \otimes \underset{\sim}{2} \otimes \underset{\sim}{1}$ et $\underset{\sim}{3} \otimes \underset{\sim}{\bar{3}} \otimes \underset{\sim}{1}$ conduisent à des invariants de jauge, respectivement par rapport à $SU(2)$ et $SU(3)$.
- l'hypercharge totale doit être nulle pour qu'il y ait invariance par $U(1)$.

À partir de ces considérations, nous obtenons le superpotentiel :

$$W = -y_{eIJ}L^I \cdot H_1 E^J - y_{dIJ}Q^I \cdot H_1 D^J + y_{uIJ}Q^I \cdot H_2 U^J + y_{nIJ}L^I \cdot H_2 N^J + \mu H_1 \cdot H_2 + m_{IJ}N^I N^J$$

Comme nous l'avons vu dans notre développement, des particules d'un même supermultiplet doivent avoir la même masse (voir 4.3). Ceci implique que nous aurions dû détecter des photinos (superpartenaire du photon) de masse nulle, ou bien des sélectrons (superpartenaires de l'électron) de $511keV$. Or ce n'est pas le cas.

Si la supersymétrie est vraie, alors il a dû se produire une *brisure de supersymétrie*, rompant l'égalité des masses entre superpartenaires. Selon les calculs faits dans le cadre du MSSM (Modèle Standard Supersymétrique Minimal), les énergies de certaines de ces superparticules devraient être accessibles aux expériences menées actuellement au LHC.

D'ici 2014, de nouveaux arguments devraient voir le jour, en faveur ou en défaveur du MSSM. Dans de dernier cas, d'autres modèles plus étendus devront être envisagés et développés, avant leur mise à l'épreuve expérimentale.

Appendices

A Conventions

Les notations en mathématiques sont capitales, et une fois choisies selon une certaine convention, il faut absolument s'y tenir, sous peine de se retrouver avec de nombreuses erreurs de signe. Nous adopterons donc les conventions suivantes :

1. Nous normaliserons c et $\hbar$ à 1.
2. Les constantes de structures, utilisées dans la définition des algèbres de Lie, seront choisies réelles (cf B.2). Nous garderont cette convention dans tout le développement, à l'exception de la dernière partie, sur les théories de jauge, pour laquelle nous les prendrons imaginaires pures.

3. La manipulation des indices tensoriels passe par une convention d'écriture absolument fondamentale : **la convention d'Einstein**. Il s'agit d'une simplification des écritures de sommation, basée sur l'utilisation des indices. Dans cette convention, toute expression contenant un indice contravariant (cf B.1) et un indice covariant identiques doit être comprise comme une sommation sur cet indice.
4. On donnera à la métrique de Minkowski (cf C.1) la forme suivante :

$$\eta_{\mu\nu} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. L'équivalent de cette métrique, dans l'espace spinoriel, est le **tenseur de Levi-Civita** : ε. Il est totalement antisymétrique, et nous le normaliserons de la façon suivante :

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon^{12} = \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = -1$$

6. Les grandeurs d'espace-temps, scalaires ou vectorielles, sont également qualifiées de bosoniques (voir section 3.1). Nous utiliserons pour les décrire des lettres du milieu de l'alphabet grec, tels que μ, ν, ρ, σ... À l'intérieur même de cet espace, nous distinguerons les composantes temporelle et spatiales, en réservant l'indice 0 à la composante temporelle, et des lettres de l'alphabet latin i, j, k... aux spatiales.
7. Les grandeurs spinorielles sont aussi dites fermioniques, et nous les représenterons par des lettres du début de l'alphabet grec : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$... Il faut cependant noter que les spineurs peuvent être de deux types : gauchers ou droitiers. On dit qu'il existe deux types de **chiralité** pour les fermions. Ces chiralités ne renvoient pas aux mêmes représentations, nous les distinguerons donc en utilisant des lettres barrées et des indices pointés pour les spineurs droitiers : $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \bar{\chi}^{\dot{\beta}}$...
8. Les conventions de sommation sur les indices spinoriels sont :

$$\lambda \cdot \lambda' = \lambda^{\alpha}\lambda'_{\alpha} \quad , \quad \bar{\chi} \cdot \bar{\chi}' = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}'^{\dot{\alpha}} \tag{7}$$

9. Enfin, il est important de noter que les grandeurs spatio-temporelles (bosoniques) commutent, tandis que les grandeurs spinorielles (fermioniques) anticommutent (cf B.2), c'est-à-dire sont telles que :

$$\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta} = -\lambda^{\beta}\lambda^{\alpha} \tag{8}$$

B Outils mathématiques

Dans notre développement, nous emploierons des termes qui pourront être peu familiers, et qu'il convient donc de définir ici.

B.1 Les tenseurs

La relativité restreinte est basée sur l'utilisation d'objets mathématiques, que l'on appelle **tenseurs**, qui ont la particularité de décrire les grandeurs physique de façon intrinsèque. C'est-à-dire que *le calcul tensoriel est le formalisme mathématique qui permet d'exprimer les lois de la physique sous une forme indépendante du système de référence choisi.* [3]

Un tenseur appartient à un multi-espace vectoriel, constitué à partir d'autant d'espaces vectoriels que l'on veut, par une opération sur les ensembles appelée **produit tensoriel**. Dans notre étude, on s'intéressera à un espace en particulier : l'espace-temps de Minkowski, et à son dual [6], tous deux de dimension 4.

Remarque : Les indices du tenseur définissent sa **variance**. Les indices supérieurs, associés à l'espace-temps, représentent la **contravariance** du tenseur. Les indices inférieurs, associés à l'espace dual, représentent sa **covariance**.

B.2 Éléments de théorie des groupes

B.2.1 Définitions

Les notions de **groupe** et de **symétrie** sont au centre des théories particulaires. Qui plus est, la supersymétrie postule une équivalence, une symétrie, entre les deux entités que sont les bosons et les fermions. Nous allons définir ces concepts centraux, ainsi que les notions connexes qui leur sont associées.

1. Un groupe est un ensemble $\mathcal{E}$ d'objets e_i, muni d'une loi de composition interne associative, et d'un élément neutre. Chaque élément doit également posséder un inverse.
   Si tous les éléments du groupe commutent, on dit que le groupe est **commutatif** ou **abélien**.
2. **Représentation d'un groupe** : Représenter un groupe $\mathcal{G}$, c'est associer à chacun de ses éléments g_i un objet mathématique O_i se prêtant bien à des calculs algébriques ou analytiques. L'ensemble des O_i, muni d'opérations adéquates, forme lui-même un groupe. Un exemple classique de représentation est celui d'une rotation dans le plan, *représentée algébriquement* par la fonction exponentielle complexe. En effet, une composition de rotations (deux rotations successives ou plus) est parfaitement décrite par le produit d'exponentielles.

3. **Paramètres et générateurs** : Un groupe continu est caractérisé par un ensemble de paramètres. Par exemple, l'ensemble R des rotations dans l'espace est entièrement caractérisé par trois paramètres α, β, γ, représentant les rotations autour des trois axes. À chaque paramètre est associé un générateur. On dit que ces générateurs **engendrent** le groupe de symétrie, où plus précisément son algèbre (voir ci-dessous).
4. Développement de Taylor de la représentation d'un groupe :
   - Pour une transformation du premier ordre (c'est-à-dire petite, mais finie) , de paramètre θ_ε et de générateur X, on définit une représentation D par :
   $$D(\theta_\varepsilon) \simeq 1 + \theta_\varepsilon X$$
   dont on déduit l'expression générale d'une transformation du premier ordre :
   $$\delta\Psi = \Psi' - \Psi = D\Psi - \Psi = \theta_\varepsilon X\Psi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \theta_\varepsilon X} \tag{9}$$
   - Toute transformation finie de paramètre θ peut être décomposée en n transformations plus petites, mais identiques, de paramètre $\frac{\theta}{n}$. Si on fait tendre n vers l'infini, alors on obtient n transformations infinitésimales, ce qui nous donne :
   $$D(\theta) = \lim_{n\to\infty}[1 + \frac{\theta}{n}X]^n = e^{\theta X}$$

6. L'espace dual de $\mathcal{V}$ est l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{V}$.

C'est sous cette forme finie que l'on représente usuellement les **groupes de Lie**.

5. Une **algèbre de Lie** est un espace vectoriel $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{K}$, muni d'une application bilinéaire,dite **crochet de Lie**, et telle que :

$$[X^a, X^b] = f_{ab}{}^c X_c$$

   où les coefficients $f_{ab}{}^c$ sont les constantes de structure de l'algèbre (voir section A pour les conventions). Ces coefficients caractérisent complètement l'algèbre de Lie correspondante. Nous aurons dans notre travail à déterminer des algèbres de Lie fondamentales. Il suffira alors de trouver les relations de commutations que satisfont les générateurs du groupe considéré.

   La relation suivante nous sera utile (voir en 3.1) :

$$[G_{\mu\nu}, O^\rho] = (R_{\mu\nu})^\rho{}_\sigma O^\sigma$$

   où G est un générateur de l'algèbre considérée, O un objet mathématique quelconque, et R une matrice, dans la représentation de l'algèbre qui décrit l'objet.
6. On définit l'anticommutateur de deux grandeurs A et B par :

$$\{A, B\} = AB + BA$$

7. Dans notre exposé, nous étendrons la notion d'algèbre de Lie à celle de **superalgèbre de Lie**. La superalgèbre sous-tendant la supersymétrie a les propriétés suivantes :
   - C'est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, où $\mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie sur des opérateurs *bosoniques* (dits aussi *pairs*), et $\mathfrak{g}_1$ une représentation spinorielle de $\mathfrak{g}_0$, sur des opérateurs *fermioniques* (dits aussi *impairs*).
   - Soit $\{B_i, i = 1...n\}$ une base de $\mathfrak{g}_0$: $[B_i, B_j] = f_{ij}{}^k B_k$
   - $\mathfrak{g}_1$ est une représentation de $\mathfrak{g}_0$, donc : $[B_i, F_a] = R_{ia}{}^b F_b$, où R_i sont les matrices de $\mathfrak{g}_0$ dans la représentation $\mathfrak{g}_1$.
   - Soit $\{F_a, a = 1...m\}$ une base de $\mathfrak{g}_1$: $\{F_a, F_b\} = g_{ab}{}^i B_i$
   - Elle est munie d'un **supercrochet de Lie**, satisfaisant les **super-identités de Jacobi** :

$$\begin{aligned}
[B_i, [B_j, B_k]] + [B_j, [B_k, B_i]] + [B_k, [B_i, B_j]] &= 0 \\
[B_i, [B_j, F_a]] + [B_j, [F_a, B_i]] + [F_a, [B_i, B_j]] &= 0 \\
[B_i, \{F_a, F_b\}] - \{[B_i, F_a], F_b\} - \{F_a, [B_i, F_b]\} &= 0 \\
[F_a, \{F_b, F_c\}] - [\{F_a, F_b\}, F_c] + [F_b, \{F_a, F_c\}] &= 0
\end{aligned}$$

B.2.2 Les groupes du modèle standard et leur représentations

Le modèle standard de la physique des particules est basé sur le groupe de jauge :

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

où l'indice c renvoie aux "couleurs" de la chromodynamique quantique, l'indice L aux spineurs gauchers, et l'indice Y à l'hypercharge. Définissons ces différents groupes et leur utilisation en physique des particules :

- $U(N)$: groupe des matrices *unitaires*, c'est-à-dire telles que : $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$, de dimension N sur $\mathbb{C}$. En physique des particules, $U(1)$ est le *groupe de jauge de l'interaction électromagnétique*, de générateur l'identité, multipliée par un coefficient appelé **hypercharge**. Ce groupe de jauge est **abélien**.

- $SU(N)$: groupe des matrices unitaires de dimension N sur $\mathbb{C}$, et de déterminant unité. $SU(2)$ est le *groupe de jauge de l'interaction faible*, que subissent les spineurs gauchers, mais pas les droitiers[7]. $SU(3)$ est le *groupe de jauge de l'interaction forte*, que subissent les quarks et les gluons.

Nous utiliserons les représentations suivantes :

- $\underset{\sim}{1}$: représentation triviale de $SU(3)$, $SU(2)$ et $U(1)$. Il n'y a qu'un seul boson de jauge associé à $U(1)$, appelé **boson B** : B^0.
- $\underset{\sim}{2}$: représentation fondamentale de $SU(2)$. Notons qu'elle est isomorphe à sa représentation complexe conjuguée.
- $\underset{\sim}{3}$: représentation fondamentale de $SU(3)$. Attention, ce même symbole renvoie également à l'adjointe de $SU(2)$. Il y a 3 bosons de jauge associés à $SU(2)$, appelés **bosons W** : W^+, W^-, W^0.
- $\underset{\sim}{\bar{3}}$: représentation conjuguée de $SU(3)$.
- $\underset{\sim}{8}$: représentation adjointe de $SU(3)$. Il y a 8 bosons de jauge associés à $SU(3)$, appelés **gluons**.

C Rappels fondamentaux

C.1 Relativité restreinte

Les grandes théories physiques s'accompagnent souvent d'un formalisme particulier, qui leur est propre ou non, dont le but est de faciliter les calculs, de rendre la manipulation des grandeurs presque intuitive. Ainsi le formalisme de Dirac est-il très performant pour travailler sur des objets quantiques.

De la même manière, la supersymétrie s'appuie sur le formalisme tensoriel de la relativité restreinte, dont nous allons ici rappeler les principaux résultats.

1. En relativité restreinte, il y a 4 dimensions : le temps et l'espace sont indissociables. Pour caractériser un évènement, on utilise un quadrivecteur position, dont nous noterons les composantes x^μ. L'espace-temps est dit **espace de Minkowski**, et est muni d'une base de vecteurs $\{\mathbf{e}_\mu\}$.
2. À deux quadrivecteurs **u** et **v** de l'espace-temps de Minkowski, est associé un invariant, le produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ tel que[8] :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (v^\nu \mathbf{e}_\nu) \\ &= u^\mu v^\nu \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \\ &= u^\mu v^\nu \eta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

où $\eta_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$ est appelé **tenseur métrique**, ou plus simplement **métrique** de l'espace-temps de Minkowski. Elle caractérise en quelque sorte la *structure* de l'espace-temps, ou plus exactement sous-tend le comportement des objets que l'on place dans cet espace.

La métrique possède la propriété fondamentale de permettre de *descendre* ou *monter* les indices tensoriels :

$$\eta^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu$$

7. On dit que l'interaction faible *viole* la parité.
8. Pour les notations, se reporter à la section A.

3. La théorie d'Einstein postule une équivalence, une *symétrie*, entre tous les repères galiléens. Les transformations qui décrivent le passage d'un repère à un autre sont représentées par les **matrices de Lorentz**, que nous noterons $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$.
   Notons que les coordonnées d'un quadrivecteur **x** dans un repère $\mathcal{R}$ se transforment selon l'expression :
$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu} \tag{10}$$
   où x'^{ν} sont les coordonnées du même quadrivecteur dans un repère $\mathcal{R}'$, tandis que les vecteurs de base se transforment selon :
$$\mathbf{e}_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \mathbf{e'}_{\nu} \tag{11}$$
   Toutes les quantités qui se transforment selon l'équation (10) sont dites contravariantes, et celles selon l'équation (11) sont dites covariantes.

C.2 Mécanique quantique relativiste

La mécanique quantique non-relativiste est régie par l'**équation de Schrödinger** :

$$H |\Psi\rangle = i \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t}$$

Mais cette équation n'est pas invariante par transformée de Lorentz. Elle n'accorde pas non plus une place égale, disons plutôt *symétrique*, aux coordonnées d'espace et de temps. En effet, elles n'ont pas le même ordre de dérivation. Au regard des succès que remportait la théorie de la relativité restreinte d'Einstein dès le début des années 20, il devenait donc nécessaire de trouver une version relativiste de cette équation.

C'est ainsi que, dans un premier temps, Oskar Klein et Walter Gordon ont, indépendamment, établi en 1926 une telle équation. En partant de l'équation relativiste de l'énergie :

$$E^2 = p^2 + m^2$$

puis en appliquant le principe d'équivalence :

$$\begin{array}{ccc} \vec{p} & \rightarrow & -i\vec{\nabla} \\ E & \rightarrow & i\frac{\partial}{\partial t} \end{array}$$

On arrive immédiatement à :

$$-\frac{\partial^2 |\Psi\rangle}{\partial t^2} = -\nabla^2 |\Psi\rangle + m^2 |\Psi\rangle$$

soit :

$$\boxed{(\Box + m^2) |\Psi\rangle = 0}$$

où $\Box$ est l'opérateur d'alembertien. Dans le formalisme relativiste que nous utiliserons dans tout le développement, et avec nos conventions (cf A), cette équation prend la forme :

$$\boxed{(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m^2)\Psi = 0}$$

C'est l'**équation de Klein-Gordon**, et sous cette forme, on voit tout de suite [9] qu'elle est invariante par transformée de Lorentz. La première équation quantique relativiste était construite.

9. Car un scalaire est invariant par transformée de Lorentz.

Cette équation n'est pas exempte de défauts. Notamment, elle est du second ordre en temps, ce qui rompt avec le postulat que la connaissance de l'état du système à l'instant $t = 0$ suffit pour déterminer son état à tout instant ultérieur.

Dirac tenta de résoudre ce problème en 1928. L'idée première est que l'on peut indifféremment décrire l'évolution d'un système par une équation du second ordre, ou par deux équations du premier ordre couplées. Cela nécessite cependant l'introduction de nouvelles variables.

Ainsi, pour passer du second au premier ordre, en temps *et* en espace, un nouvel objet s'est avéré nécessaire, appelé par définition **spineur**. Il s'agit d'une fonction d'onde à 4 composantes. Alors, la façon la plus simple d'écrire des dérivées premières, tout en gardant le terme d'énergie de masse, est :

$$\boxed{i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = [\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m]\Psi}$$

où β et les trois composantes de $\vec{\alpha}$ sont des matrices 4×4. C'est l'**équation de Dirac**. Bien sûr, il faut que l'on puisse, à partir de cette équation, retrouver celle de Klein-Gordon, représentante quantique de l'équation de l'énergie. Ceci impose les contraintes suivantes aux coefficients $\vec{\alpha}$ et β :

$$\begin{array}{llll} {\alpha_i}^2 = I_4 & \text{et} & \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0\,, & (i \neq j) \\ \beta^2 \;= I_4 & \text{et} & \alpha_i\beta + \beta\alpha_i \;\;\, = 0\,, & (\forall i) \end{array}$$

Ces relations admettent une infinité de solutions, mais l'une d'entre elles, appelée *représentation standard*, fait intervenir les **matrices de Pauli**, génératrices de $SU(2)$:

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

Sous forme covariante, l'équation de Dirac s'écrit plus simplement :

$$\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0}$$

où $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$ sont les **matrices de Dirac**, avec σ^i les matrices de Pauli, σ^0 l'identité et $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$.

Le fait le plus surprenant qui a suivi l'établissement de cette équation, est qu'elle conduit à deux types de solutions, possédant la même masse, mais une charge opposée : c'était la découverte théorique des **anti-particules**. Particules et antiparticules sont des fermions dans des représentations complexes conjuguées l'une de l'autre. Ainsi, un couple fermionique (particule, antiparticule) peut être représenté par un spineur de Dirac. Dans le cas particulier où particules et antiparticules se confondent, le couple sera représenté par un spineur de Majorana.

C.3 Électrodynamique

En relativité restreinte, on définit les **quadrivecteurs courant et potentiel** par :

$$\tilde{j} = (\rho, \vec{j}) \qquad \text{et} \qquad \tilde{A} = (\phi, \vec{A})$$

Dans la jauge de Lorentz : $\vec{\nabla}A = \vec{0}$, les deux équations de propagation des potentiels peuvent alors être réunies en :

$$\Box\tilde{A} = \tilde{j} \tag{12}$$

Le formalisme de la relativité restreinte permet de réduire le nombre d'équations de Maxwell à deux, tout en simplifiant leur expression. Considérons la quantité :

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$$

Il s'agit du **tenseur électromagnétique** ou encore **tenseur de Faraday**. Les équations de Maxwell sans termes sources s'écrivent :

$$\boxed{\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0}$$

Quant aux deux équations avec termes sources, on les regroupes à partir de l'équation (12) :

$$\boxed{\eta^{\mu\nu}\partial_\mu F_{\nu\rho} = j_\rho}$$

C.4 Lagrangiens

La troisième partie de notre exposé concerne la construction de lagrangiens invariants. Il convient de poser ici quelques rappels et définitions. Commençons par rappeler l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} \right) = 0}$$

Cette équation permet, par dérivation du lagrangien, d'accéder aux équations du mouvement. On comprends dès lors l'importance fondamentale des lagrangiens en physique, et particulièrement en physique des particules. Voici les lagrangiens fondamentaux dont nous aurons besoin :

1. le lagrangien **de Klein-Gordon** : $\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$, qui décrit l'évolution des scalaires, bosons de spin 0.
2. le lagrangien **de Dirac** : $\mathcal{L}_D = \frac{1}{2}\bar{\Psi}_D(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi_D$, qui décrit l'évolution des fermions de spin $\frac{1}{2}$.
3. le lagrangien **de Maxwell** : $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A^\rho j_\rho$, qui décrit l'évolution des photons de spin 1.
4. le lagrangien **de Yang-Mills** : $\mathcal{L}_E = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} - A^\rho_a j^a_\rho$, généralisation de celui de Maxwell, qui décrit l'évolution des autres bosons.

D'autre part, le **théorème de Noether** nous enseigne que *l'invariance d'un lagrangien par une certaine transformation, implique la conservation d'une quantité fondamentale, appelée* ***charge****, et générant après quantification un groupe de symétrie.*

Ainsi, par exemple, l'invariance par translation dans le temps entraîne la conservation de l'énergie, celle par translation dans l'espace, la conservation de la quantité de mouvement, et celle par rotation la conservation du moment angulaire.

La construction de lagrangiens invariants est donc d'une importance capitale en physique.

Nous nous appuierons sur ce résultat fondamental pour la construction de nos lagrangiens : *Les lagrangiens sont invariants à une dérivée totale près.* Ceci signifie que les équations du mouvement sont les mêmes, qu'on les dérive d'un lagrangien, ou du même lagrangien augmenté d'une dérivée totale.

Autrement dit, un lagrangien est invariant par une certaine transformation, si cette transformation implique :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu F \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta\mathcal{L} = \partial_\mu F$$

Ainsi, pour construire des lagrangiens invariants, on cherchera des termes dont la transformation supersymétrique conduit à une dérivée totale.

Notons que nous ne construirons pas stricto sensu des lagrangiens, mais plutôt des *densités lagrangiennes*. En effet, le lagrangien L classique est construit de telle sorte que $S = \int L dt$, tandis que la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ dont il est question ici est définie par $S = \int \mathcal{L} d^4x$. Nous utiliserons ici l'appellation lagrangien sans risque de confusion.

C.5 Théories de jauge

C.5.1 Invariance de jauge abélienne

En physique théorique, une **théorie de jauge** est une théorie des champs basée sur un groupe de symétrie *locale*, appelé **groupe de jauge**, et définissant ce qu'on appelle une **invariance de jauge**.

Considérons une transformation de $U(1)$, donc abélienne :

$$\Psi \quad \rightarrow \quad e^{i\alpha}\Psi$$

Le lagrangien de Dirac $\mathcal{L}_D$ est clairement invariant par cette transformation : l'invariance de jauge est dite *globale*.

Si maintenant, $\alpha(x)$ dépend des coordonnées d'espace-temps, la transformation de jauge devient *locale*. La dérivation faisant apparaître un terme parasite dans $\mathcal{L}_D$, celui-ci n'est plus invariant par cette transformation. Pour le rendre invariant de jauge à nouveau, il nous faut construire une nouvelle dérivée, que l'on appellera **dérivée covariante de jauge**, munie d'un terme supplémentaire, dit **champ de jauge**, qui doit se transformer de façon à annuler le terme parasite.

La dérivée covariante prend la forme suivante :

$$D_\mu\Psi = (\partial_\mu - igA_\mu)\Psi$$

où g est la **constante de couplage** du champ de Dirac Ψ_D et du champ de jauge A_μ.

On montre aisément que si A_μ se transforme comme :

$$A_\mu \quad \rightarrow \quad A_\mu - \partial_\mu\alpha(x)$$

alors $D_\mu\Psi$ se transforme comme Ψ, et le lagrangien de Dirac devient bien invariant : on a obtenu une invariance de jauge *locale*.

Remarques :
- Les interactions fondamentales sont décrites à partir de telles invariances de jauge locales.
- dans le langage des superchamps, une transformation de U(1) s'écrit :

$$\Phi \quad \rightarrow \quad e^{ig\Lambda}\Phi$$

  où Φ et Λ sont des superchamps chiraux. Ici, le complexe conjugué *n'annule pas* l'exponentielle mais conduit à un terme en $e^{i(\Lambda-\Lambda^\dagger)}$. Ainsi, pour obtenir un lagrangien invariant de jauge, il nous faudra construire un terme qui tienne compte de ces contraintes.

C.5.2 Invariance de jauge non-abélienne

On se donne une algèbre de Lie non-abélienne :

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c$$

où les T_a sont les générateurs du groupe de jauge dans la représentation considérée.

Les transformations de ce groupe sont de la forme :

$$\Psi \quad \rightarrow \quad e^{i\alpha^a(x)T_a}\Psi = U(x)\Psi$$

Le même raisonnement que précédemment nous amène à rajouter autant de champs de jauge qu'il y a de générateurs, de façon à obtenir la dérivée covariante de jauge :

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu - igA_\mu^a T_a)\Psi \tag{13}$$

Pour que le lagrangien soit invariant de jauge, on montre que les champs doivent se transformer comme :

$$A_\mu(x) \quad \rightarrow \quad U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x)$$

L'invariance de jauge est ainsi conservée.

D Remerciements

Nous remercions en tout premier lieu notre maître de stage, le professeur Michel Rausch de Traubenberg, de nous avoir proposé un stage théorique, qui a totalement répondu à nos attentes. Sa disponibilité et son implication nous aurons permis d'avancer efficacement dans ce stage, et nous avons le sentiment d'avoir accompli des progrès notables, sous son encadrement.

Nous exprimons également notre gratitude à l'Université de Bordeaux d'avoir accepté de nous laisser suivre ce stage si enrichissant, et le laboratoire d'accueil, l'Institut Pluridisciplinaire Hubert Curien, de nous avoir reçu, et dans d'aussi bonnes conditions.

Nous tenons également à remercier Adam Alloul et Damien Tant, respectivement doctorant et stagiaire de master 2 de Mr Rausch, dont l'aide nous aura été précieuse à de nombreuses reprises durant ce stage.

Références

[1] B. Fuks and M. R. de Traubenberg, *Supersymétrie, exercices avec solutions*. Ellipses, 2011.
voir la page internet.

[2] C. Semay and B. Sylvestre-Brac, *Relativité Restreinte, bases et applications*. Dunod, 2010.
voir la page internet.

[3] C. Semay and B. Sylvestre-Brac, *Introduction au Calcul Tensoriel*. Dunod, 2007.
voir la page internet.

[4] C. Aslangul, *Des Mathématiques pour les Sciences. Concepts, méthodes et techniques pour la modélisation*. De Boeck, 2011.
voir la page internet.

[5] W. Appel, *Mathématiques pour la Physique... et les physiciens !* H&K, 4e édition, 2008.
voir la page internet.

[6] F. Delduc, *Introduction aux Groupes de Lie destinée aux Physiciens*. Laboratoire de physique de l'ENS Lyon, Septembre, 2008.
voir la page internet.